Ejercicios: 2º Parcial

1. Dada la cadena de Markov tiempo discreta $X(n)$, con espacio de estados $E = \{1, 2, 3, 4\}$ y con matriz de transición igual a

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/12 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la función

$$h(x) = \begin{cases} 9/20 & x = 1 \\ 7/20 & x = 2 \\ 1 & x = 3 \\ 0 & x = 4 \end{cases},$$

   a) Calcular $\mathbb{E}[h(X(n+1))|X(n) = 1]$ y $\mathbb{E}[h(X(n+1))|X(n) = 2]$,
   b) Calcular $\mathbb{E}[h(X(n+1))|X(n) = 3]$ y $\mathbb{E}[h(X(n+1))|X(n) = 4]$,
   c) Mostrar que el proceso $h(X(n))$ es una martingala con respecto a $\mathcal{X}_n = \{X(0), X(1), \ldots, X(n)\}$.

(2 Puntos)

2. Dada la cadena de Markov con estados $\{1, 2\}$ y generador

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$$

y asumiendo que empiece en el estado 1:

   a) Dibujar el diagrama de transición y caracterizar los estados.
   b) Encontrar la matriz de transición de la cadena incrustada.
   c) Calcular los autovalores de la matriz $\mathbf{Q}$ y la matriz $\mathbf{P}(t)$
   d) Calcular la probabilidad $\mathbb{P}_1(X(1/3) = 2)$
   e) Calcular la distribución límite.
   f) Calcular la distribución estacionaria.
   g) Calcular los tiempos medios de regreso al estado 1 y al estado 2.

(4 Puntos)

3. Considera una empresa cuyo superávit se mueve como un movimiento Browniano de deriva 1 y volatilidad 2 y que la empresa empiece con un capital inicial igual a 6. Es decir, llamando $M(t)$ al proceso que modela el superavit de la empresa, tenemos que

$$M(t) = 6 + 1\,t + 2\,B(t)$$

donde $B(t)$ es el processo Browniano estándar.

   a) Calcula el valor de $\mathbb{E}[e^{-1\,B(t)}]$
   b) Muestra que $e^{-0.5M(t)}$ es una martingala.
   c) Calcula la probabilidad de que la empresa quiebre antes de alcanzar un nivel de 8

(4 Puntos)